Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$

i) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνεχή $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$

Λύση

Για το (i) θα πρέπει να βρω ένα $M_n > 0$: $\|f_n(x)\|_\infty \leq M_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ (από θεώρημα Weirstrass).

Πρέπει $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \|f_n(x)\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$

Άρα παίρνω $M_n = \frac{1}{n^2}$ και πρέπει

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ γιατί $2 > 1$ (Απ ΑΠΕΙ1)

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{U} f$.

Επίσης, ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \lim_{n \to +\infty} \int_\alpha^\beta f_n(t)\,dt$

άρα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{n} f_n(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{n=1}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos(nx)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[\sin(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \overset{0}{\cancel{\sin(n \cdot 0)}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

Παρατηρώ:

για $n=1$: $\frac{1}{n^3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) = \frac{1}{1^3}$

για $n=2$: $\frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) = \frac{1}{2^3} \cdot 0 = 0$

για $n=3$: $\frac{1}{n^3} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) = -\frac{1}{3^3}$

$\vdots$

άρα παρατηρώ ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{1^3} + 0 - \frac{1}{3^3} + 0 + \frac{1}{5^3} + 0 - \frac{1}{7^3} + \dots$$ άρα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$$